Том 29, № 146 2024

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-146-188-203
УДК 517.972.5, 517.95

Математическое моделирование физических процессов в композиционных средах

Вячеслав Васильевич ПРОВОТОРОВ[1], **Сергей Михайлович СЕРГЕЕВ**[2]

[1] ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет»
394018, Российская Федерация, г. Воронеж, Университетская площадь, 1

[2] ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого»
195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, 29

Аннотация. Рассматривается достаточно часто встречающаяся в промышленной сфере сплошная среда, состоящая из совокупности слоев (фаз) — слоистой однонаправленной композиционной среды (композитов), и физические процессы в слоях — процессы переноса, волновые процессы и изменение напряженно-деформированного состояния этой среды. Осуществляется математическое описание структуры композиционной среды в терминах слоистой области, формируется соболевское пространство функций с носителем в слоистой области (вместе со вспомогательными пространствами) для описания количественных характеристик слоев и устанавливается слабая разрешимость соответствующих краевых задач. При этом в местах взаимного примыкания слоев определены условия, описывающие закономерности процесса переноса и волнового процесса, а также изменения напряженно-деформированного состояния и перемещения точек слоев. Работа состоит из трех частей. Первая часть содержит описание структуры композиционной среды, основные понятия и описание классических пространств функций с носителем в слоистой области. Вторая часть посвящена построению вспомогательных пространств для математического описания краевых задач процессов переноса и волнового процесса, получению достаточных условий их разрешимости. Третья часть содержит описание упругих свойств композиционной среды, формируется задача о напряженно-деформированном состоянии среды, для которой строится пространство допустимых решений, удовлетворяющих соотношениям, описывающим законы перемещения точек в местах примыкания слоев, устанавливаются условия слабой разрешимости указанной задачи. Результаты работы используются при анализе задач оптимизации физических процессов и явлений в композиционных материалах.

Ключевые слова: композиционная среда, слоистая область, процессы переноса, волновые процессы, напряженно-деформированное состояние композиционных материалов, слабая разрешимость

Для цитирования: *Провоторов В.В., Сергеев С.М.* Математическое моделирование физических процессов в композиционных средах // Вестник российских университетов. Математика. 2024. Т. 29. № 146. С. 188–203. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-146-188-203

SCIENTIFIC ARTICLE

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-146-188-203

Mathematical modeling of physical processes in composition media

Vyacheslav V. PROVOTOROV[1] **, Sergey M. SERGEEV**[2]
[1] Voronezh State University
1 Universitetskaya Sq., Voronezh 394018, Russian Federation
[2] Peter the Great St.Petersburg Polytechnic University
29 Polytechnicheskaya St., St.Petersburg 195251, Russian Federation

Abstract. A continuous medium, which is quite common in the industrial sphere, consisting of a set of layers (phases), i.e. a layered unidirectional composite medium (composites), and physical processes in the layers, i.e. transfer processes, wave processes, and changes in the stress-strain state of this this medium, is considered. A mathematical description of the structure of the compositional medium in terms of the layered domain is realized, a Sobolev space of functions with a carrier in the layered domain (together with auxiliary spaces) is constructed to describe the quantitative characteristics of the layers, and the weak solvability of the corresponding boundary value problems is established. At the same time, in the places of mutual adjacency of the layers, the conditions describing the regularities of the transfer process and the wave process, as well as changes in the stress-strain state and the displacement of layer points were determined. The work consists of three parts. The first part contains a description of the structure of the compositional medium, the basic concepts, and a description of the classical spaces of functions with a carrier in the layered domain. The second part is devoted to the construction of auxiliary spaces for the mathematical description of boundary problems of the processes of transfer and wave process, and to obtaining sufficient conditions for their solvability. The third part contains a description of the elastic properties of the composite medium, the problem of stress-strain is formulated for which the space of admissible solutions satisfying the relations describing the laws of displacement of points at the junctions of layers is constructed, the conditions of weak solvability of the specified problem are established. The results of the work are used in the analysis of problems of optimization of physical processes and phenomena in composite materials.

Keywords: composite materials, layered domain, the problem of stress-deformed state of composition materials, weak solvability

Mathematics Subject Classification: 74G55.

For citation: Provotorov V.V., Sergeev S.M. Mathematical modeling of physical processes in composition media. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **29**:146 (2024), 188–203. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-146-188-203 (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

На практике достаточно часто используются слоистые композиционные материалы (композиты), представляющие собой набор слоев из однонаправленных композитов. Каждый слой содержит длинные волокна (армирующие элементы), расположенные параллельно друг другу, и является однонаправленным волокнистым композитом. Математическое описание однонаправленных волокнистых композитов представлено в монографии [1, с. 320] с помощью формализмов периодической среды, использующих в некотором смысле предельный специальный оператор. В данном исследовании представлен анализ напряженно-деформированного состояния материала с обладающими различными свойствами слоями. Рассматривается иной подход, не связанный с периодичностью композиционной среды, при этом определены условия, описывающие законы перемещения элементов композиционной среды. Вводимая слоистая область определяет модель слоистой упругой композиционной среды в пространстве $\mathbb{R}^3$.

Работа состоит из трех частей. Первая часть посвящена математическому описанию структуры композиционной среды, в ней представлены основные понятия и даны определения пространств функций с носителем в слоистой области. Вторая часть содержит подход к построению вспомогательных пространств для математического описания краевых задач процессов переноса и волнового процесса, при этом получены достаточные условия разрешимости этих задач. Третья часть содержит описание упругих свойств композиционной среды, формируется задача о напряженно-деформированном состоянии композиционной среды, для этой задачи строится пространство допустимых решений, удовлетворяющих соотношениям, описывающим законы перемещения точек в местах примыкания слоев, устанавливаются условия слабой разрешимости указанной задачи.

1. Основные понятия и определения

1.1. Описание структуры композиционной среды

Сложносочлененные структуры областей (например, сетеподобные области [2]) достаточно удобны для математического описания носителей различного типа сетевых процессов [3]. Слоистая область $\Im \subset \mathbb{R}^3$ ($\partial\Im$ — граница $\Im$), являясь частным случаем сетеподобной области, имеет аналогичное описание и состоит из двух совокупностей: совокупность подобластей $\Im_j$, $j=\overline{0,N}$ — слоев области $\Im$ ($\partial\Im_j$ — граница $\Im_j$) и совокупность поверхностей S_j, $j=\overline{1,N}$. Последние являются общими границами попарных подобластей — слоев $\Im_j$. Поверхности S_j называют поверхностями примыкания слоев $\Im_j$, $j=\overline{0,N}$. Таким образом, слоистая область $\Im$ и ее граница $\partial\Im$ определяются соотношениями

$$\Im = \Big(\bigcup_{j=0}^{N}\Im_j\Big)\bigcup\Big(\bigcup_{j=1}^{N}S_j\Big), \quad \partial\Im = \Big(\bigcup_{j=0}^{N}\partial\Im_j\Big)\setminus\Big(\bigcup_{j=1}^{N}S_j\Big).$$

Рассмотрения в статье проводятся в предположениях липшицевости подобластей $\Im_j$, $j=\overline{0,N}$, и гладкости поверхностей S_j, $j=\overline{1,N}$. Также предполагается, что $\Im_j$ — звездная относительно шара из $\Im_j$, $j=\overline{0,N}$. Допустимо различие характеристик и свойств изучаемых тепловых или волновых процессов на $\Im_j$, описание физических явлений изучаемого процесса на S_j подчинено определенным соотношениям, представленным ниже.

1.2. Пространства функций с носителем в слоистой области

Используются классические пространства действительных измеримых по Лебегу функций $u(x)$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$:

$L_2(\Omega)$ — пространство функций $u(x)$, суммируемые с квадратом в Ω, скалярное произведение и норма определены соотношениями

$$(u,v)_\Omega = \int\limits_\Omega u(x)v(x)dx, \quad \|u\|_\Omega = \sqrt{(u,u)_\Omega}; \tag{1.1}$$

$W_2^1(\Omega)$ — пространство функций $u(x) \in L_2(\Omega)$ с обобщенными производными $\frac{\partial u(x)}{\partial x_\iota} \in L_2(\Omega)$, $\iota = 1,2,3$, скалярное произведение и норма определены соотношениями

$$(u,v)_\Omega^1 = \int\limits_\Omega \Big(u(x)v(x) + \sum_{\iota=1}^{3} \frac{\partial u(x)}{\partial x_\iota}\frac{\partial v(x)}{\partial x_\iota}\Big)dx, \quad \|u\|_\Omega^1 = \sqrt{(u,u)_\Omega^1}; \tag{1.2}$$

$W_{2,0}^1(\Omega) \subset W_2^1(\Omega)$ — ядро $W_2^1(\Omega)$: $W_{2,0}^1(\Omega) = \{u : u \in W_2^1(\Omega),\, u|_{x\in\partial\Omega} = 0\}$.

Для слоистой области $\Im$: $\int\limits_\Im u(x)dx = \sum\limits_{j=0}^{N}\int\limits_{\Im_j} u(x)dx$, пространства $L_2(\Im)$ и $W_2^1(\Im)$ аналогичны указанным выше, скалярные произведения и нормы определяются формулами

$$(u,v)_\Im = \sum_{j=1}^{N}\int\limits_{\Im_j} u(x)v(x)dx, \quad \|u\|_\Im = \sqrt{(u,u)_\Im}, \tag{1.3}$$

$$(u,v)_\Im^1 = \sum_{j=0}^{N}\int\limits_{\Im_j} \Big(u(x)v(x) + \sum_{\iota=1}^{3} \frac{\partial u(x)}{\partial x_\iota}\frac{\partial v(x)}{\partial x_\iota}\Big)dx, \tag{1.4}$$

$$\|u\|_\Im^1 = \Big(\sum_{j=0}^{N}\int_{\Im_j}\Big(u^2(x) + \sum_{\iota=1}^{3}\big(\frac{\partial u(x)}{\partial x_\iota}\big)^2\Big)dx\Big)^{1/2} = \sqrt{(u,u)_\Im^1}, \tag{1.5}$$

вытекающими из соотношений (1.1) и (1.2): (1.3) для $L_2(\Im)$ и (1.4), (1.5) для $W_2^1(\Im)$, $W_{2,0}^1(\Im)$.

2. Процессы переноса и волновые процессы в композиционной среде

В соответствии с подходом анализа начально-краевых задач, описывающих математические модели физических процессов в композиционных средах [3], определим пространство допустимых решений таких задач со свойствами, характеризующими закономерности физических явлений на поверхностях S_j, $j = \overline{1,N}$, примыкания слоев $\Im_j$, $j = \overline{0,N}$. При описании таких пространств используются два подхода: классическое описание физической сути процесса, в основе которого лежат априорные соображения [4], и математическое описание при использовании обобщенной постановки краевой задачи — слабая постановка задачи [3].

Приведем первый подход, основанный на классическом описании физической сути тепловых и волновых явлений на границах компонентов (фаз) композиционной среды. Представим условия продолжения функций $u(x)$ с области $\Im$ на $\overline{\Im} = \bigcup\limits_{j=0}^{N}\overline{\Im}_j$. Пусть $C(\overline{\Omega})$ —

множество непрерывных функций в $\overline{\Omega}$. Для функции $u(x) \in C(\overline{\Omega})$ существуют $\frac{\partial u(x)}{\partial x_\iota}$, $\iota = 1,2,3$, в $\overline{\Omega}$ как продолжение по непрерывности с Ω на $\overline{\Omega}$. Отсюда следует, что введено множество $C^1(\overline{\Omega})$ с элементами $u(x)$, для которых определены непрерывные $\frac{\partial u(x)}{\partial x_\iota}$, $\iota = 1,2,3$, в $\overline{\Omega}$, при этом соотношениями (1.1) и (1.2) определяются скалярное произведение и норма, соответственно. Таким образом, можно считать, что на $\overline{\Im}$ имеют место множества: $C(\overline{\Im})$ — множество непрерывных функций $u(x)$ со скалярным произведением и нормой (1.3), $C^1(\overline{\Im}_j)$ $j = \overline{0,N}$ — совокупность $N+1$ множеств функций $u(x) \in C(\overline{\Im})$, для которых существуют $\frac{\partial u(x)}{\partial x_\iota}$, $\iota = 1,2,3$, в $\overline{\Im}_j$ при любом $j = \overline{0,N}$, $C^1(\overline{\Im})$ — множество функций $u(x) \in C^1(\overline{\Im}_j)$ $j = \overline{0,N}$, допускающих скачок производных $\frac{\partial u(x)}{\partial x_\iota}$, $\iota = 1,2,3$, на поверхностях S_j примыкания слоев и для которых соотношения (1.4) и (1.5) определяют скалярное произведение и норму.

Рассмотрим дифференциальное выражение

$$\mathcal{A}u := -\sum_{\kappa,\iota=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_\kappa}\Big(a_{\kappa\iota}(x)\frac{\partial u}{\partial x_\iota}\Big),$$

которое определяет эллиптическую часть краевых задач математических моделей тепловых и волновых процессов; $a_{\kappa\iota}(x)$ — принадлежащие $L_2(\Im)$ ограниченные функции (подробные описания приведены ниже в соотношении (2.3)). Пусть $\tilde{C}^1(\overline{\Im})$ — множество функций $u(x) \in C^1(\overline{\Im})$, для которых на S_j, $j = \overline{1,N}$, выполнены соотношения

$$u(x)|_{S_j^+} = u(x)|_{S_j^-}, \quad \int_{S_j^+} \frac{\partial u(x)}{\partial \nu_\Lambda} dS + \int_{S_j^-} \frac{\partial u(x)}{\partial \nu_\Lambda} dS = 0, \tag{2.1}$$

здесь $\frac{\partial u(x)}{\partial \nu_\Lambda} = \sum\limits_{\kappa,\iota=1}^{3} a_{\kappa\iota}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_\iota}\cos(\bar{n}, x_\kappa)$, S_j^+, S_j^- — односторонние поверхности для S_j, $\cos(\bar{n}, x_\kappa)$ — κ-й направляющий косинус внешней нормали к S_j^+ и S_j^-. Отметим, что условия (2.1) по сути своей являются условиями примыкания смежных слоев композиционной среды, разделенных поверхностью S_j: если осуществляется тепловой поток в композиционной среде, то первое соотношение определяет равенство температур на S_j^+ и S_j^-, второе — баланс тепловых потоков через S_j.

З а м е ч а н и е 2.1. Условия (2.1) могут принимать иной вид в соответствии с изменениями закономерностей явлений на поверхностях S_j, а именно,

$$u(x)|_{S_j^+} = u(x)|_{S_j^-}, \quad \int_{S_j^+} \frac{\partial u(x)}{\partial \nu_\Lambda} dS + \int_{S_j^-} \frac{\partial u(x)}{\partial \nu_\Lambda} dS + \int_{S_j^-} g(x) dS = 0, \quad j = \overline{1,N}.$$

Слагаемое $\int\limits_{S_j^-} g(x)dS$ означает влияние сил внешнего воздействия со стороны поверхности S_j^-, $g(x)$ — плотность распределения этих сил (влияние сил внешнего воздействия возможно и со стороны S_j^+).

О п р е д е л е н и е 2.1. Пространство $\tilde{W}^1(\Im)$ — замыкание $\tilde{C}^1(\overline{\Im})$ в $W_2^1(\Im)$.

Из определения 2.1 для $u(x) \in \tilde{W}^1(\Im)$ следует, что $u(x)_{\Im_j} \in W^1(\Im_j)$, $j = \overline{0, N}$ (здесь $u(x)_{\Im_j}$ — сужение функции $u(x)$ на $\Im_j$). При этом из существования обобщенных производных $\frac{\partial u(x)}{\partial x_\iota}$, $\iota = 1, 2, 3$, в $\Im$ следует существование $\frac{\partial u(x)}{\partial x_\iota}$ в $\Im_j$, а значит, $u(x) \in \tilde{W}^1(\Im)$ и имеет место (2.1).

Пусть $\tilde{C}_0^1(\overline{\Im})$ — подмножество множества $\tilde{C}^1(\overline{\Im})$, для элементов $u(x)$ которого имеет место равенство $u(x)|_{\partial\Im} = 0$.

О п р е д е л е н и е 2.2. Пространство $\tilde{W}_0^1(\Im)$ — замыкание $\tilde{C}_0^1(\overline{\Im})$ в $W_2^1(\Im)$, $\tilde{W}_0^1(\Im)$ является подпространством пространства $\tilde{W}^1(\Im)$.

З а м е ч а н и е 2.2. Пространства $\tilde{W}^1(\Im)$, $\tilde{W}_0^1(\Im)$ определяют допустимые состояния краевой задачи для оператора $\mathcal{A}$: для краевой задачи Дирихле используется $\tilde{W}_0^1(\Im)$, для задачи с общими краевыми условиями — $\tilde{W}^1(\Im)$.

Другой подход формирования аналогичных пространств $\tilde{W}^1(\Im)$, $\tilde{W}_0^1(\Im)$ основан на использовании класса функций $W_2^1(\Im)$ при описании тепловых и волновых явлений в местах примыкания слоев — соответствующие краевые задачи определяются в слабой постановке [3].

Определим для $u(x), \eta(x) \in W_2^1(\Im) \times W_2^1(\Im)$ билинейную непрерывную, симметричную форму

$$\rho(u, \eta) = \int\limits_{\Im} \sum_{\kappa,\iota=1}^{3} a_{\kappa\iota}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_\iota} \frac{\partial \eta(x)}{\partial x_\kappa} dx, \tag{2.2}$$

порожденную дифференциальным выражением $\mathcal{A}$u. При этом для (2.2) считаем выполненными условия

$$\begin{aligned} &a_{\kappa\iota}(x) = a_{\iota\kappa}(x), \\ &a_*\xi^2 \le \sum_{\kappa,\iota=1}^{3} a_{\kappa\iota}(x)\xi_\kappa\xi_\iota \le a^*\xi^2, \\ &0 < \beta_* \le b(x) \le \beta^*, \quad x \in \Im, \end{aligned} \tag{2.3}$$

с положительными постоянными a_*, a^*, β и $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3$, $\xi^2 = \sum\limits_{\kappa=1}^{3} \xi_\kappa^2$, $a_{\kappa\iota}(x), b(x) \in L_2(\Im)$; соотношения (2.3) имеют место почти всюду на $\Im$.

Пусть $f(x) \in L_2(\Im)$ и L — линейный непрерывный функционал в $W_2^1(\Im)$, заданный линейной формой

$$L(\eta) = \int\limits_{\Im} f(x)\eta(x) dx, \quad \eta(x) \in W_2^1(\Im). \tag{2.4}$$

Имеет место следующее утверждение (лемма Лакса–Мильграма [5] и [1, с. 32]): если $\rho(u, u) \ge a_*\|u\|^2_{W_2^1(\Im)}$ при любом $u \in W_2^1(\Im)$, то существует единственный элемент $u \in W_2^1(\Im)$, для которого

$$\rho(u, \eta) = L(\eta) \quad \forall \eta \in W_2^1(\Im). \tag{2.5}$$

Используя формулу Грина (полное обоснование формулы Грина для слоистой области $\Im$ аналогично приведенному в работе [3]), представим соотношение (2.5) терминами дифференциальных уравнений в слабой постановке. Для этого введем функции $\eta_j(x) \in W_{2,0}^1(\Im)$:

$$\eta_j(x) = \eta(x), \quad x \in \Im_j, \quad \eta_j(x) = 0, \quad x \in \Im \backslash \Im_j, \quad j = \overline{0, N}.$$

Заменяя $\eta(x)$ в (2.4), (2.5) на $\eta_j(x)$ и используя формулу Грина на всех подобластях $\Im_j$, $j=\overline{0,N}$, получаем равенства

$$\int\limits_{\Im_j}(\mathcal{A}u)(x)\eta_j(x)dx=-\int\limits_{\partial\Im_j}\frac{\partial u}{\partial\nu_{\mathcal{A}}}\eta(x)dx+\rho(u,\eta_j)=\int\limits_{\Im_j}f(x)\eta_j(x)dx, \tag{2.6}$$

где, как и (2.1), при описании условий примыкания

$$\frac{\partial u}{\partial\nu_{\mathcal{A}}}=\sum_{\kappa,\iota=1}^{3}a_{\kappa\iota}(x)\frac{\partial u}{\partial x_\iota}\cos(n_j,x_\kappa), \tag{2.7}$$

$\cos(n_j,x_\kappa)$ — κ-й направляющий косинус внешней нормали n_j к сторонам поверхности S_j для каждого фиксированного $j=\overline{1,N}$. Отсюда следует, что $u(x)$ удовлетворяет уравнениям

$$\mathcal{A}u=f(x),\quad x\in\Im_j, \tag{2.8}$$

в слабой постановке для каждого $j=\overline{0,N}$, а значит, $u(x)$ в силу (2.8) удовлетворяет интегральным тождествам

$$\rho(u,\eta_j)=\int\limits_{\Im_j}f(x)\eta_j(x)dx\quad\forall\eta_j(x)\in W_{2,0}^1(\Im_j)$$

при $j=\overline{0,N}$.

Пусть функция $\eta(x)\in W_2^1(\Im_j)$, отлична от нуля на поверхностях S_j, $j=\overline{1,m}$, где $1\le m\le N$, и равна нулю на всех оставшихся S_j. Из уравнений (2.8) вытекает

$$\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{\Im_j}\mathcal{A}u(x)\eta(x)dx=\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{\Im_j}f(x)\eta(x)dx.$$

Пользуясь формулой Грина в левой части этого равенства (см. соотношения (2.6)), а также учитывая представление (2.5) формы $L(\eta)$, получаем

$$-\sum_{j=1}^{m}\int S_j^+\frac{\partial u}{\partial\nu_{\mathcal{A}}}\eta(x)dx-\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{S_j^-}\frac{\partial u}{\partial\nu_{\mathcal{A}}}\eta(x)dx+\rho(u,\eta_j)=\int\limits_{\Im}f(x)\eta(x)dx,$$

или

$$-\sum_{j=1}^{m}\Big(\int\limits_{S_j^+}\frac{\partial u}{\partial\nu_{\mathcal{A}}}\eta(x)dx+\int\limits_{S_j^-}\frac{\partial u}{\partial\nu_{\mathcal{A}}}\eta(x)dx\Big)+\rho(u,\eta)=\int\limits_{\Im}f(x)\eta(x)dx, \tag{2.9}$$

пояснения для S_j^+, S_j^- и $\frac{\partial u}{\partial\nu_{\mathcal{A}}}$ установлены соотношениями (2.1) и (2.7), соответственно. Фиксируя в (2.9) поочередно $m=1$, $m=2$, $\ldots$, $m=N$ и учитывая (2.4), приходим к соотношениям

$$\int\limits_{S_j^+}\frac{\partial u(x)}{\partial\nu_{\mathcal{A}}}\eta(x)dx+\int\limits_{S_j^-}\frac{\partial u(x)}{\partial\nu_{\mathcal{A}}}\eta(x)dx=0,\quad j=\overline{1,m},\quad 1\le m\le N. \tag{2.10}$$

Добавление условий непрерывности функций $u(x)$ на поверхностях S_j

$$u(x)|_{S_j^+} = u(x)|_{S_j^-}, \quad j = \overline{1, N}, \tag{2.11}$$

характерных для границ слоев композиционных сред при анализе процессов переноса и волновых процессов, приводит к условиям (2.1).

Следуя результатам работы [3], для описания тепловых и волновых процессов в композиционной среде вводятся пространства состояний $\tilde{W}_0^{1,0}(\Im_T)$ и $\tilde{W}_0^1(\Im_T)$, $\Im_T = \Im \times (0, T)$, $T < \infty$:

1) пространство $\tilde{W}_0^{1,0}(\Im_T)$ — замыкание в норме

$$\|u\|_{\Im_T}^{1,0} = \Big(\sum_{k=1}^{N} \int\limits_{\Im_k \times (0,T)} \Big(u^2 + \sum_{\iota=1}^{n} u_{x_l}^2 \Big) dx dt \Big)^{1/2},$$

функций $u(x,t) \in L_2(\Im)$, следы которых $u(x, t_0) \in \tilde{W}_0^1(\Im)$, $t_0 \in (0, T)$, непрерывно зависят от t_0 в норме $W_2^1(\Im)$;

2) если норму $\|u\|_{\Im_T}^{1,0}$ заменить на

$$\|u\|_{\Im_T}^{1} = \Big(\sum_{k=1}^{N} \int\limits_{\Im_k \times (0,T)} (u^2 + y_t^2 + \sum_{\iota=1}^{n} u_{x_l}^2) dx dt \Big)^{1/2},$$

получим пространство $\tilde{W}_0^1(\Im_T)$, $\tilde{W}_0^1(\Im_T) \subset \tilde{W}_0^{1,0}(\Im_T)$.

Математическое описание тепловых и волновых процессов в композиционных материалах осуществляется с использованием дифференциальных систем

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_\kappa}\Big(a_{\kappa\iota}(x) \frac{\partial u}{\partial x_\iota} \Big) = f(x,t), \quad u|_{t=0} = \vartheta(x), \quad x \in \Im,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_\kappa}\Big(a_{\kappa\iota}(x) \frac{\partial u}{\partial x_\iota} \Big) = f(x,t), \quad u|_{t=0} = \vartheta(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \vartheta_1(x),$$

где $f(x,t) \in L_{2,1}(\Im_T)$ ($\|u\|_{L_{2,1}(\Im_T)} = \int\limits_0^T (\int\limits_{\Im} u^2(x,t) dx)^{1/2} dt$), $\vartheta(x), \vartheta_1(x) \in L_2(\Im)$. Устанавливается слабая разрешимость в пространствах $\tilde{W}_0^{1,0}(\Im_T)$ и $\tilde{W}_0^1(\Im_T)$, соответственно [3]. При этом используется метод Галеркина со специальным базисом, каковым является множество обобщенных собственных функций оператора $\mathcal{A}$ в пространстве $\tilde{W}_0^1(\Im)$.

3. Основные результаты

3.1. Описание упругих свойств композиционной среды

Далее изучается задача о напряженно-деформированном состоянии композиционных сред. При ее анализе используются полученные выше результаты, при этом учитываются особенности, порождаемые размерностью пространств функций, описывающие количественные характеристики композиционных сред.

З а м е ч а н и е 3.1. В монографии [1, с. 321] рассматривается сплошная композиционная среда с периодической структурой. В данном исследовании представлен анализ напряженно-деформированного состояния среды со слоями, обладающими различными свойствами.

Введем векторную функцию $u = \{u_1, u_2, u_3\} \in \left(W_2^1(\Im)\right)^3$ перемещений точек композиционной среды и через $\sigma := \{\sigma_{il}\}$, $i, l = 1, 2, 3$, обозначим тензорную функцию напряжений [4, с. 103]. Тензорная функция напряжений σ и функция перемещения u в композиционной среде связаны между собой законом Гука

$$\sigma_{il}(u) = \sum_{k,m=1}^{3} a_{ilkm}\varepsilon_{km}(u), \tag{3.1}$$

здесь $\varepsilon_{km}(u)$, $k, m = 1, 2, 3$, — компоненты тензорной функции деформаций

$$\varepsilon_{km}(u) := \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u_k}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_k}\Big), \quad k, m = 1, 2, 3. \tag{3.2}$$

Везде ниже считаем выполненными следующие условия:

$$a_{ilkm}(x) \in L_\infty(\Im), \tag{3.3}$$

$$a_{ilkm}(x) = a_{likm}(x) = a_{ilmk}(x) = a_{mkil}(x), \tag{3.4}$$

$$\sum_{i,l,k,m=1}^{3} a_{ilkm}(x)\xi_{il}\xi_{km} \geq C_0 \sum_{i,j=1}^{3} \xi_{i,l}^2 \quad \forall \xi_{i,l} = \xi_{l,i}, \tag{3.5}$$

где C_0 — положительная постоянная; соотношения (3.4), (3.5) имеют место почти всюду в $\Im$.

3.2. Задача о напряженно-деформированном состоянии композиционной среды в слабой постановке

Для вектор-функций $u = \{u_1, u_2, u_3\}$ из $\left(W_2^1(\Im)\right)^3$ введем необходимые пространства, аналогичные пространствам $\tilde{W}^1(\Im)$ и $\tilde{W}_0^1(\Im)$ раздела 2. Построение таких пространств для формального описания в слабой постановке дифференциальной системы напряженно-деформированного состояния сплошной среды вместе с необходимыми соотношениями на поверхностях примыкания несколько отличается от приведенного выше, где использовались скалярные функции для описания тепловых и волновых процессов, наблюдаемых в композиционных средах.

Относительно $u = \{u_1, u_2, u_3\}$ и $\upsilon = \{\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3\}$ из $\left(W_2^1(\Im)\right)^3$ рассмотрим аналогичную (2.2) билинейную форму

$$a(u, \upsilon) = \int\limits_{\Im} \sum_{i,l,k,m=1}^{3} a_{ilkm}(x)\varepsilon_{km}(u)\varepsilon_{il}(\upsilon)dx. \tag{3.6}$$

Введем вектор-функции

$$f(x) := (f_1(x), f_2(x), f_3(x)) \in (L_2(\Im))^3,$$

$$F_j(x) := (F_1^j(x), F_2^j(x), F_3^j(x)) \in (L_2(S_j))^3, \quad j = \overline{1, N}$$

и обозначим через $\mathfrak{L}$ линейный функционал в $\left(W_{2,0}^1(\Im)\right)^3$:

$$(\mathfrak{L}, \upsilon) = \int\limits_{\Im} \sum_{i=1}^{3} f_i(x)\upsilon_i dx + \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{S_j} \sum_{i=1}^{3} F_i^j(x)\upsilon_i dx. \tag{3.7}$$

Рассмотрим задачу о напряженно-деформированном состоянии композиционной среды в слабой постановке: необходимо определить функцию $u(x)$ такую, что

$$a(u,\upsilon) = (\mathfrak{L},\upsilon) \tag{3.8}$$

для любых функций υ из некоторого подпространства пространства $\left(W_2^1(\Im)\right)^3$.

Подставим представления (3.6), (3.7) для $a(u,\upsilon)$ и $(\mathfrak{L},\upsilon)$ в соотношение (3.8). Рассуждения, аналогичные второй части раздела 2., приводят (см. (2.10), (2.11)) к соотношениям на поверхностях примыкания слоев

$$u_{S_J^+} = u_{S_J^-}, \quad \int\limits_{S_J^+}\sum_{i,l=1}^{3} a_{ilkm}(x)\varepsilon_{km}(u)ds + \int\limits_{S_J^-}\sum_{i,l=1}^{3} a_{ilkm}(x)\varepsilon_{km}(u)ds + \int\limits_{S_J^-}\sum_{i=1}^{3} F_i^j ds = 0, \quad j=\overline{1,N},$$

которые определяют элементы подпространства $\left(\tilde V^1(\Im)\right)^3$ пространства $\left(W_2^1(\Im)\right)^3$. Если при этом к соотношениям на поверхностях примыкания слоев добавить еще условие $u\big|_{\partial\Im}=0$, получим пространство $\left(\tilde V_0^1(\Im)\right)^3 \subset \left(\tilde V^1(\Im)\right)^3$; нормы в пространствах $\left(\tilde V^1(\Im)\right)^3$ и $\left(\tilde V_0^1(\Im)\right)^3$ определены нормой $\left(W_2^1(\Im)\right)^3$.

Ниже рассматривается задача (3.8) в пространстве $\left(\tilde V_0^1(\Im)\right)^3$ (пространство $\left(\tilde V^1(\Im)\right)^3$ используется для анализа задач с более общими краевыми условиями). Задача (3.8) порождает систему линейных непрерывных операторов N_i, $i=1,2,\ldots,6$, которые для $\upsilon=\{\upsilon_1,\upsilon_2,\upsilon_3\}\in\left(\tilde V_0^1(\Im)\right)^3$ определим следующим образом:

$$\begin{aligned} &N_1(\upsilon)=\tfrac{\partial\upsilon_1}{\partial x_1}, \quad N_2(\upsilon)=\sqrt2\Big(\tfrac{\partial\upsilon_1}{\partial x_2}+\tfrac{\partial\upsilon_2}{\partial x_1}\Big), \quad N_3(\upsilon)=\sqrt2\Big(\tfrac{\partial\upsilon_1}{\partial x_3}+\tfrac{\partial\upsilon_3}{\partial x_1}\Big),\\ &N_4(\upsilon)=\sqrt2\Big(\tfrac{\partial\upsilon_2}{\partial x_3}+\tfrac{\partial\upsilon_3}{\partial x_2}\Big), \quad N_5(\upsilon)=\tfrac{\partial\upsilon_2}{\partial x_2}, \quad N_6(\upsilon)=\tfrac{\partial\upsilon_3}{\partial x_3}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

С точки зрения теории напряженно-деформированных состояний сплошных сред выражения $N_i\upsilon$, $i=1,2,\ldots,6$, определяемые соотношениями (3.9), задают с точностью до постоянных коэффициентов компоненты деформации среды (3.2), формируемые вектор-функцией перемещений $\upsilon=\{\upsilon_1,\upsilon_2,\upsilon_3\}$. Операторы N_i задают матрицу $\{N_{ir}(x,\xi)\}$ с элементами $N_{ir}(x,\xi)=\sum\limits_{|k|=1} g_{irk}(x)\xi_1\xi_2\xi_3$, $i=1,2,\ldots,6$, $r=1,2,3$, определяемые посредством соотношений

$$\begin{aligned} &\mathrm{N}_1(\xi)=2\xi_1, \quad \mathrm{N}_2(\xi)=\sqrt2\Big(\xi_2+\xi_1\Big), \quad \mathrm{N}_3(\xi)=\sqrt2\Big(\xi_3+\xi_1\Big),\\ &\mathrm{N}_4(\xi)=\sqrt2\Big(\xi_3+\xi_2\Big), \quad \mathrm{N}_5(\xi)=2\xi_2, \quad \mathrm{N}_6(\xi)=2\xi_3, \end{aligned} \tag{3.10}$$

для любых комплексных чисел $\xi=\{\xi_1,\xi_2,\xi_n\}\neq0$.

Для анализа слабой разрешимости задачи (3.8), следуя идеям работы [1, с. 59], предварительно введем понятие коэрцитивной системы операторов, установим свойства этой системы и приведем утверждения, базирующиеся на оценках норм ее операторов. Используем определения и основные утверждения для «классических» областей $\Omega\subset\mathbb{R}^n$.

Пусть $W=\left(W_2^1(\Omega)\right)^m$, $\|\upsilon\|_W^2=\sum\limits_{r=1}^{m}\|\upsilon_r\|^2_{W_2^1(\Omega)}$. Рассмотрим систему линейных непрерывных операторов $N_i: W\to L_2(\Omega)$, $i=\overline{1,\nu}$, определяемых выражениями

$$N_i\upsilon=\sum_{r=1}^{m}\sum_{|k|\le1} g_{irk}D^k\upsilon_r, \quad i=\overline{1,\nu}, \quad D^k\upsilon_r=\frac{\partial^k\upsilon_r}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\partial x_3^{k_3}},$$

здесь $g_{irk}\in L_\infty(\Omega)$.

О п р е д е л е н и е 3.1. Система операторов N_i, $i=\overline{1,\nu}$, называется W-коэрцитивной относительно $(L_2(\Omega))^m$, если существует положительная постоянная C, для которой выполнено неравенство

$$\sum_{i=1}^{\nu}\|N_i\upsilon\|^2_{L_2(\Omega)}+\sum_{r=1}^{m}\|\upsilon_r\|^2_{L_2(\Omega)}\geq C\|\upsilon\|^2_W\quad\forall\upsilon\in W.$$

Пусть W' — замкнутое подпространство W, $W'\subseteq W$.

О п р е д е л е н и е 3.2. Система операторов N_i, $i=\overline{1,\nu}$, называется коэрцитивной в W', если существует положительная постоянная C, для которой выполнено неравенство

$$\sum_{i=1}^{\nu}\|N_i\upsilon\|^2_{L_2(\Omega)}\geq C\|\upsilon\|^2_W\quad\forall\upsilon\in W'.$$

О п р е д е л е н и е 3.3. Открытое множество $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию конуса, если $x+U(\varepsilon(x),\mathrm{h})\in\Omega$ для произвольного $x\in\Omega$, где $U(\varepsilon(x),\mathrm{h})$ — прямой круговой конус с вершиной в начале координат, фиксированным раствором, высотой $\mathrm{h}<\infty$ и вектором направления оси $e(x)$.

Для дальнейшего потребуются следующие утверждения.

Теорема 3.1 ([5,6])**.** *Для ограниченной области $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, удовлетворяющей условию конуса, система дифференциальных операторов N_i, $i=\overline{1,\nu}$, W-коэрцитивна относительно $(L_2(\Omega))^n$, если ранг матрицы с элементами*

$$N_{i\,r}(x,\xi)=\sum_{|k|=1}g_{irk}(x)\xi_1^{k_1}\cdots\xi_n^{k_n},\quad i=\overline{1,\nu},\quad r=\overline{1,m},$$

определенной операторами N_i, $i=\overline{1,\nu}$, равен m любого $x\in\Omega$ и для любых комплексных $\xi=\{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n\}\neq 0$.

Теорема 3.2 ([1], с. 60, теорема)**.** *Пусть система операторов N_i, $i=\overline{1,\nu}$ является W-коэрцитивной относительно $(L_2(\Omega))^3$, пусть $a(u,\upsilon)$ — билинейная симметричная, непрерывная форма на $W\times W$, причем $a(\upsilon,\upsilon)\geq 0$ для произвольных $\upsilon\in W$, и пусть из соотношений*

$$\omega\in W,\quad\sum_{i=1}^{\nu}\|N_i\omega\|^2_{L_2(\Omega)}+a(\omega,\omega)=0\tag{3.11}$$

следует $\omega=0$. Тогда существует постоянная $c>0$ такая, что

$$\sum_{i=1}^{\nu}\|N_i\upsilon\|^2_{L_2(\Omega)}+a(\upsilon,\upsilon)\geq c\|\upsilon\|^2_W\quad\forall\upsilon\in W.$$

Далее для слоистой области $\Im$ рассмотрим задачу (3.8) в пространстве $\big(\tilde V_0^1(\Im)\big)^3$. Для удобства представления результатов также используем обозначение $V=\big(\tilde V_0^1(\Im)\big)^3$.

З а м е ч а н и е 3.2. Так как области $\Im_j$, $j=\overline{0,N}$, липшицевы, то они удовлетворяют условию конуса, следовательно, $\Im$ также удовлетворяет условию конуса.

Следствие 3.1. *Из теоремы 3.1 при* $n = m = 3$, $\nu = 6$, *непосредственно вытекает* V*-коэрцитивность относительно* $(L_2(\Im))^3$ *операторов* N_i, $i = 1, 2, \ldots, 6$, *представленных соотношениями* (3.9) *и матрицей* $\{N_{ir}(x,\xi)\}$, *определенных посредством соотношений* (3.10).

Используя неравенства (3.3)–(3.5), *нетрудно получить неравенства, связывающие нормы* $\|N_i v\|_{L_2(\Im)}$ *и* $\|v\|_V$ *для операторов* N_i, $i = 1, 2, \ldots, 6$, *как следствие из теоремы 3.2, а именно, справедлива*

Теорема 3.3. *Пусть* $a(u, v)$ *— билинейная симметричная, непрерывная форма на* $V \times V$, *причем* $a(v, v) \geq 0$ *для произвольных* $v \in V$ *и пусть из аналогичных* (3.11) *соотношений*

$$\omega \in V, \quad \sum_{i=1}^{6} \|N_i \omega\|^2_{L_2(\Im)} + a(\omega, \omega) = 0$$

следует $\omega = 0$. *Тогда существует постоянная* $C > 0$ *такая, что*

$$\sum_{i=1}^{6} \|N_i v\|^2_{L_2(\Im)} + a(v, v) \geq C\|v\|^2_V \quad \forall v \in V. \tag{3.12}$$

Следствие 3.2. *Обозначим через* $V' = \{u : u \in V,\ a(u, u) = 0\}$ *замкнутое подпространство пространства* V. *Тогда в силу* (3.12) *приходим к неравенству* $\sum\limits_{i=1}^{6} \|N_i v\|^2_{L_2(\Im)} \geq C\|v\|^2_V$ *при любых* $v \in V'$, *т. е. система операторов* N_i, $i = 1, 2, \ldots, 6$ *является коэрцитивной в* V'.

Следствие 3.3. *Пусть* V' *— замкнутое подпространство в* V *такое, что из условия* $\sum\limits_{i=1}^{6} \|N_i \omega\|^2_{L_2(\Im)} = 0 \ \ \forall \omega \in V'$ *следует* $\omega = 0$. *Тогда существует постоянная* $C_0 > 0$, *при которой*

$$\sum_{i=1}^{6} \|N_i v\|^2_{L_2(\Im)} \geq C_0\|v\|^2_V \quad \forall v \in V, \tag{3.13}$$

т. е. система операторов N_i, $i = 1, 2, \ldots, 6$ *является коэрцитивной в* V'.

Действительно, из $V' \subset V$ вытекает V'-коэрцитивность относительно $(L_2(\Im))^3$ системы N_i ($i = 1, 2, \ldots, 6$). В качестве билинейной симметричной непрерывной формы $a(u, v)$ на $V \times V$ возьмем нулевую форму ((см. следствие 3.2). Используя утверждение теоремы 3.2 для $V = V'$, получим неравенство (3.13).

Учитывая представления (3.9) операторов N_i, $i = 1, 2, \ldots, 6$, утверждения теоремы 3.1 и следствие 3.1, в силу определения 2.1 получим

$$\int\limits_{\Im} \sum_{i,l=1}^{3} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i}\right)^2 dx + \sum_{i=1}^{3} \|u_i\|^2_{L_2(\Im)} \geq C\|u\|^2_V \quad \forall u \in V, \tag{3.14}$$

здесь $\|u\|^2_V = \sum\limits_{i=1}^{3} \|u_i\|^2_{W_2^1(\Im)}$, C — положительная постоянная.

Для слоистых композиционных областей $\Im$ неравенство (3.14) является аналогом известного неравенства Корна [1, с. 62] (см. также, [4, с. 110]), где при анализе напряженно-деформированных состояний композитов используются «классические» области Ω.

Пусть функции $F_j(x) := (F_1^j(x), F_2^j(x), F_3^j(x))$, $j = \overline{0,N}$, описывающие внешние воздействия на композиционную среду в поверхностях примыкания, равны нулю. Определим подпространство $Q \subset V$ соотношением

$$Q = \Big\{ u \in V : \frac{\partial u_i}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i} = 0, \;\; i, l = 1, 2, 3 \Big\}. \tag{3.15}$$

Элементами этого пространства являются функции, с физической точки зрения определяющие так называемые жесткие смещения среды в малом (см. соотношения (3.1), (3.2)). Элементы $u = (u_1, u_2, u_2) \in Q$, как следует из (3.15), на каждой подобласти $\Im_j$, $j = \overline{0,N}$, имеют вид (см. [5])

$$u_1^j = a_1^j - b_3^j x_2 + b_2^j x_3, \quad u_2^j = a_2^j - b_1^j x_3 + b_3^j x_1, \quad u_3^j = a_3^j - b_2^j x_1 + b_1^j x_3, \tag{3.16}$$

где a_i^j, b_i^j — постоянные, $i = 1, 2, 3$, $j = \overline{0,N}$. Выражением $a(u, v) = \int\limits_{\Upsilon} uv dx$, где Υ — открытое подмножество $\partial\Im$, определим билинейную симметричную форму на $V \times V$. В силу неравенств (3.3)–(3.5) имеем $\|a(u, v)\| \le C\|u\|_V \|v\|_V$, а значит, форма $a(u, v)$ непрерывна на $V \times V$.

Пусть $u = (u_1, u_2, u_3) \in Q$ и

$$\int\limits_{\Upsilon} \big(u_1(x)^2 + u_2(x)^2 + u_3(x)^2\big) ds = 0. \tag{3.17}$$

Исходя из соотношений (3.16), функция $u(x)$ на каждой подобласти $\Im_j$, $j = \overline{0,N}$, имеет представление

$$u^j(x) = a^j + A_j x \quad (j = \overline{0,N}), \tag{3.18}$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)$, $u^j(x) = col\big(u_1^j(x), u_2^j(x), u_3^j(x)\big)$, $a^j = col\big(a_1^j, a_2^j, a_3^j\big)$, элементы матриц A_j в (3.18) определяются постоянными b_i^j, $i = 1, 2, 3$, $j = \overline{0,N}$, из соотношений (3.16). Нетрудно убедиться, что в силу (3.15) и выполнения условий примыкания, выполнено $a^j = a = (a_1, a_2, a_3)$ и $u^j(x) = u\,(x) = a$, $j = \overline{0,N}$. А значит, учитывая соотношения $\varepsilon_{i\,l}(u) = \frac{\partial u_i}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i} = 0$, $i, l = 1, 2, 3$, и (3.17), приходим к соотношению $a = 0$, т. е. $u(x) = 0$. Таким образом, показано, что при $u \in Q$ из соотношения (3.17) (напомним, что $u\big|_{\Upsilon \subset \partial\Im} = 0$ и $Q \subset V = \big(\tilde{V}_0^1(\Im)\big)^3$) следует $u(x) = 0$. Поэтому из неравенства (3.14) согласно теореме 3.2 вытекает неравенство

$$\int\limits_{\Im} \sum_{i,l=1}^{3} \Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i}\Big)^2 dx + \int\limits_{\Upsilon} (u_1(x)^2 + u_2(x)^2 + u_3(x)^2) ds \ge C\|u\|_V^2 \quad \forall u \in V, \tag{3.19}$$

где $C = const > 0$.

В соответствии со сказанным, введем пространство

$$V' = \big\{ u : \int\limits_{\Upsilon} \big(u_1(x)^2 + u_2(x)^2 + u_3(x)^2\big) ds = 0 \big\},$$

которое замкнуто в V, так как отображение $u \mapsto \int\limits_{\Upsilon} (u_1(x)^2 + u_2(x)^2 + u_3(x)^2) ds$ является непрерывным из V в $\{0\} \subset \mathbb{R}^1$. Тогда из неравенства (3.19) и представления пространства V вытекает неравенство

$$\int\limits_{\Im} \sum_{i,l=1}^{3} \Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i}\Big)^2 dx \ge C\|u\|_V^2 \quad \forall u \in V.$$

3.3. Достаточные условия слабой разрешимости задачи (3.8)

Сохраняя обозначения пунктов 3.1. и 3.2., рассмотрим в $\left(\tilde{V}_0^1(\Im)\right)^3$ задачу (3.8) о напряженно-деформированном состоянии композиционной среды в слабой постановке.

Теорема 3.4. *Пусть для коэффициентов $a_{ij\,km}(x)$ функций $\sigma_{ij}(u)(x)$ выполнены условия (3.3)–(3.5), билинейная $a(u,v)$ и линейная $\mathfrak{L}$ формы заданы соотношениями (3.6) и (3.7), соответственно. Тогда существует единственное слабое решение u задачи (3.8), и для него справедлива оценка*

$$\|u\|_V^2 \leq c, \quad c > 0 - const. \tag{3.20}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из представления (3.6) билинейной формы $a(u,v)$, учитывая соотношение (3.5), получаем

$$a(u,u) = \int\limits_{\Im} \sum_{i,j,k,m=1}^{3} a_{ijkm}(x)\varepsilon_{km}(u)\varepsilon_{ij}(u)dx \geq c_0\|u\|_H^2, \quad c_0 > 0 - const,$$

для произвольного элемента $u \in \left(\tilde{V}_0^1(\Im)\right)^3$, где через $\|u\|_H^2$ обозначено

$$\|u\|_H^2 = \int\limits_{\Im} \sum_{i,j=1}^{3} \varepsilon_{ij}^2(u)dx. \tag{3.21}$$

Исходя из неравенства (3.14) и в силу следствия 3.2 теоремы 3.2, можно показать, что выражение (3.21) задает норму $\|\cdot\|_H$ в пространстве $V = \left(\tilde{V}_0^1(\Im)\right)^3$, эквивалентную введенной в пункте 3.2. Это вытекает из неравенства

$$\int\limits_{\Im} \sum_{i,j=1}^{3} \Big(\varepsilon_{i,j}(u)\Big)^2 dx + \sum_{i=1}^{3} \|u_i\|_{L_2(\Im)}^2 \leq \alpha\|u\|_V$$

(здесь используется очевидное соотношение $(\theta+\vartheta)^2 \leq 2(\theta^2+\vartheta^2)$) и, учитывая неравенство (3.14),

$$\int\limits_{\Im} \sum_{i,j=1}^{3} \Big(\varepsilon_{i,j}(u)\Big)^2 dx + \sum_{i=1}^{3} \|u_i\|_{L_2(\Im)}^2 \geq \beta\|u\|_V^2 \quad \forall u \in V,$$

с положительными постоянными α, β. Доказательство завершает использование теоремы Лакса–Мильграма [7]: из существования на $V \times V$ билинейной формы $a(u,v)$ со свойствами непрерывности и коэрцитивности вытекает существование единственного слабого решения задачи (3.8) и справедливость оценки (3.20). □

Заключение

Представлены описание структуры композиционной среды, основные свойства и описание пространств функций с носителем в слоистой области для математического описания и анализа краевых задач процессов переноса и волнового процесса. Работа содержит описание упругих свойств композиционной среды, формируется задача о напряженно-деформированном состоянии среды, для которой строится пространство допустимых решений, удовлетворяющих соотношениям, описывающим законы перемещения точек в местах примыкания слоев, и устанавливаются условия слабой разрешимости этой задачи.

Результаты пункта 3.1. можно эффективно использовать при решении задач оптимального управления, представленных в работах [8–10]. Результаты пунктов 3.2. и 3.3. распространяются на более общие чем (3.2) представления компонентов тензорной функции деформаций, являющиеся основополагающими в анализе различного типа задач оптимизации деформируемых композиционных материалов.

References

[1] В. Г. Литвинов, *Оптимизация в эллиптических граничных задачах с приложениями к механике*, Наука, М., 1987, 368 с. [V. G. Litvinov, *Optimization in Elliptic Boundary Value Problems with Applications to Mechanics*, Nauka Publ., Moscow, 1987 (In Russian), 368 pp.]

[2] A. P. Zhabko, A. I. Shindyapin, V. V. Provotorov, "Stability of weak solutions of parabolic systems with distributed parameters on the graph", *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, **15**:4 (2019), 457–471.

[3] A. P. Zhabko, V. V. Karelin, V. V. Provotorov, S. M. Sergeev, "Optimal control of thermal and wave processes in composite materials", *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, **19**:3 (2023), 403–418.

[4] Г. Дюво, Ж.-Л. Лионс, *Неравенства в механике и физике*, Наука, М., 1989, 384 с. [G. Duveau, J.-L. Lyons, *Inequalities in Mechanics and Physics*, Nauka Publ., Moscow, 1989 (In Russian), 384 pp.]

[5] I. Hlavacek, J. Necas, "On inequalities of Korn's type", *Arch. Rat. Mech. and Anal.*, **36**:4 (1970), 305–334.

[6] О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, *Интегральные представления функций и теоремы вложения*, Наука, М., 1975, 480 с. [O. V. Besov, V. P. Ilyin, S. M. Nikolsky, *Integral Representations of Functions and Embedding Theorems*, Nauka Publ., Moscow, 1975 (In Russian), 480 pp.]

[7] P. D. Lax, N. Milgram, "Parabolic equations. Contributions to the theory of partial differential", *Ann. Math. Studies*, **33** (1954), 167–190.

[8] А. С. Волкова, Ю. А. Гнилицкая, В. В. Провоторов, "О разрешимости краевых задач для уравнений параболического и гиперболического типов на геометрическом графе", *Системы управления и информационные технологии*, 2013, № 1(51), 11–15. [A. S. Volkova, Yu. A. Gnilitskaya, V. V. Provotorov, "On the solvability of boundary value problems for equations of parabolic and hyperbolic types on a geometric graph", *Management Systems and Information Technologies*, 2013, № 1(51), 11–15 (In Russian)].

[9] Ж.-Л. Лионс, *Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными*, Мир, М., 1972, 414 с. [J.-L. Lyons, *Optimal Control of Systems Described by Partial Differential Equations*, Mir Publ., Moscow, 1972 (In Russian), 414 pp.]

[10] В. В. Провоторов, "К вопросу построения граничных управлений в задаче о гашении колебаний системы «мачта-растяжки»", *Системы управления и информационные технологии*, 2008, № 2.2(32), 293–297. [V. V. Provotorov, "On the issue of constructing boundary controls in the problem of damping oscillations of the "mast-braced" system", *Management Systems and Information Technologies*, 2008, № 2.2(32), 293–297 (In Russian)].

Информация об авторах

Провоторов Вячеслав Васильевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация. E-mail: wwprov@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8761-7174

Information about the authors

Vyacheslav V. Provotorov, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Partial Differential Equations and Probability Theory Department, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation. E-mail: wwprov@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8761-7174

Сергеев Сергей Михайлович, кандидат технических наук, доцент института промышленного менеджмента, экономики и торговли, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация. E-mail: sergeev2@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0195-4589

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:
Провоторов Вячеслав Васильевич
E-mail: wwprov@mail.ru

Поступила в редакцию 19.02.2024 г.
Поступила после рецензирования 23.05.2024 г.
Принята к публикации 07.06.2024 г.

Sergey M. Sergeev, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Institute of Industrial Management, Economics and Trade, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St.Petersburg, Russian Federation.
E-mail: sergeev2@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0195-4589

There is no conflict of interests.

Corresponding author:
Vyacheslav V. Provotorov
E-mail: wwprov@mail.ru

Received 19.02.2024
Reviewed 23.05.2024
Accepted for press 07.06.2024